

1. Να δοθεί η αποδεικτική διαδικασία της απαγωγής σε άτοπο στη μορφή μιας λογικής πρότασης και ν' αποδειχτεί ότι αυτή είναι ταυτολογία. 1 μ.

2. Για τυχόντα σύνολα A , B και Γ ν' αποδειχτεί ότι:

$$\alpha) A \cup B = A \cup \Gamma \wedge A \cap B = A \cap \Gamma \Leftrightarrow B = \Gamma.$$

$$\beta) (A \cup B) - \Gamma = (A - \Gamma) \cup (B - \Gamma).$$

$$\gamma) \mathcal{P}(A - B) \subseteq (\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)) \cup \{\emptyset\}$$

δ) Να δοθεί παράδειγμα συνόλων A και B τέτοιων, ώστε η (iii) να ισχύει με τη σχέση του γνήσιου υποσυνόλου. 2 μ.

3. Να εξεταστεί ποιες από τις γνωστές ιδιότητες των διμελών σχέσεων έχουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\alpha) \sigma \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ και } (\forall x, y \in \mathbb{R}) x \sigma y \Leftrightarrow x^2 = y^2$$

$$\beta) \sigma \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ και } (\forall x, y \in \mathbb{R}) x \sigma y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{N}$$

$$\gamma) \sigma \subseteq \mathbb{N}^2 \text{ και } (\forall x, y \in \mathbb{N}) x \sigma y \Leftrightarrow 3x < 2y$$

1,5 μ.

4. α) Ας είναι $f: A \rightarrow B$ μια συνάρτηση, με $f(f^{-1}(Y)) = Y$ για όλα τα $Y \subseteq B$.

Ν' αποδειχτεί ότι, τότε, η f είναι επί του συνόλου B και αντίστροφα.

β) Αν $f: A \rightarrow B$ και $g: A \rightarrow B$ είναι συναρτήσεις, ν' αποδειχτεί ότι:

$$f \subseteq g \Rightarrow f = g.$$

2 μ.

5. α) Να δοθούν οι ορισμοί του πεπερασμένου, του αριθμήσιμου και του το πολύ αριθμήσιμου συνόλου και, με τη βοήθεια των ορισμών και μόνο, ν' αποδειχτεί ότι, αν A είναι πεπερασμένο σύνολο και B το πολύ αριθμήσιμο σύνολο, τότε το $A \times B$ είναι το πολύ αριθμήσιμο σύνολο.

β) Ν' αποδειχτούν οι σχέσεις: i) $\mathbb{N} \times \mathbb{Q} \simeq \mathbb{N}$ και ii) $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} - \{0\}$. 2 μ.

6. α) Αν \mathbb{N} είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών, ν' αποδειχτεί ότι για τυχόντα στοιχεία $x, y \in \mathbb{N}$ ισχύει $x + y \in \mathbb{N}$.

β) Για τυχόντα στοιχεία α, β του σώματος \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών ν' αποδειχτεί ότι ισχύει:

$$\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0.$$

2 μ.